Комбинаторика и логика

Младшая лига

1. Черный снаружи куб $4 \times 4 \times 4$ распилили на 64 единичных кубика. Грани кубиков, примыкающие к распилам — белые. Можно ли сложить из них параллелепипед $1 \times 8 \times 8$, у которого обе грани 8×8 раскрашены в шахматном порядке?

(НМТ 2002 (Швеция))

2. Есть фонарик, в который помещается 2 батарейки, и есть 10 батареек, из которых 5 хорошие, и 5 плохие. За одну попытку можно вставить в фонарик 2 батарейки. Он будет светить только когда обе батарейки — хорошие. Как не позднее чем на 8-й попытке наверняка добиться, чтобы фонарик светил?

(А. Устинов)

3. Дан правильный 777-угольник. Петя и Вася по очереди проводят его диагонали, начинает Петя. Диагонали не должны пересекаться внутри многоугольника. Проигрывает тот, после чьего хода диагонали разобьют 777-угольник на части, среди которых есть четырехугольная. Кто из игроков выигрывает, как бы ни играл соперник?

(Rioplatense Olympiad 2013, Level 3, Problem 4)

4. В компании из n человек нет тех, которые были бы не знакомы ни с кем, и тех, которые были бы знакомы со всеми остальными. Докажите, что каких-то четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый был знаком ровно с одним своим соседом.

(Kürschák 2014)

5. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана n чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. При каких n фокусник и ассистент могут договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

(А. Устинов)

Старшая лига

1. Муха ползает по ребрам октаэдра, причем, выползая из одной вершины по некоторому ребру, она доползает до другой (а не возвращается обратно с полпути).

Может ли однажды оказаться, что она в одной из вершин побывала 2014 раз, а в каждой из остальных — 650 раз?

(Math League Tournaments (China part))

2. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана девять чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. Могут ли фокусник и ассистент договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

(А. Устинов)

3. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки и во сколько раз?

(фольклор)

4. Класс выиграл приз в виде мешка с 2014 монетами, который в начале находится у старосты (а у других детей в классе денег нет). При встрече два одноклассника делят деньги поровну между собой, если у них четное количество монет в сумме. А если в сумме количество нечетное, то одну монету они отдают классному руководителю, а остальные делят поровну между собой. Через некоторое время все монеты оказались у классного руководителя. Какое наименьшее количество детей могло быть в классе?

(SMT 2014 (Швеция))

5. На клетках шахматной доски лежит по алмазу так, что в каждой паре соседних (по стороне) клеток веса алмазов отличаются меньше, чем на 1 карат. Докажите, что эти алмазы можно разложить по одному в клетки прямоугольника 2×32 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседних клеток веса алмазов отличались меньше, чем на 1 карат.

(А. Шаповалов)